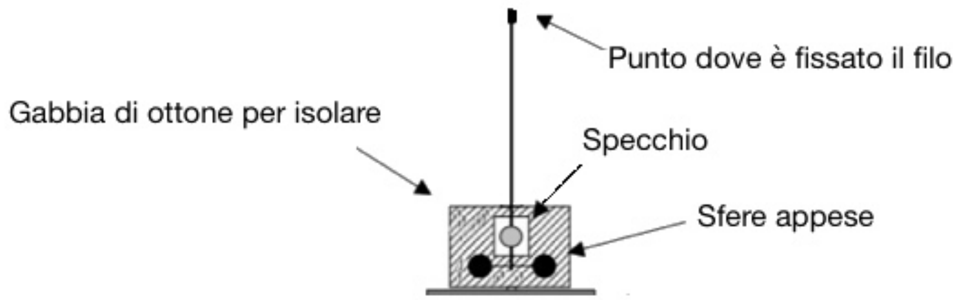
Bilancia di Torsione di Cavendish

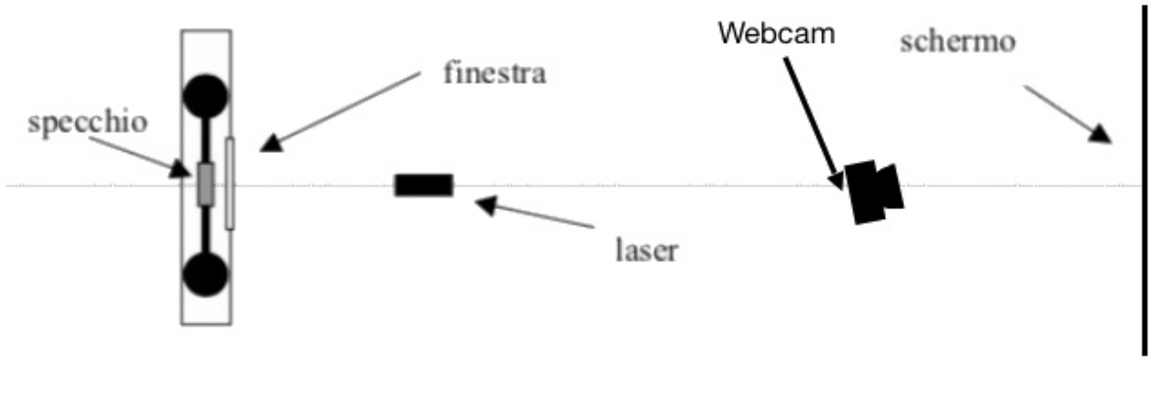
Gabriele Belcapo 3S1
a.s. 2018/2019

Vene descritto un esperimento fatto nel laboratorio nel laboratorio del Liceo Scientifico e Tecnico di Orvieto, eseguito dal 12 marzo 2019 al 17 aprile 2019, per misurare la costante di Gravitazione Universale G

Descrizione dell'apparato

Per misurare la costante di gravitazione universale abbiamo usato una bilancia di torsione di Cavendish, che consente di misurare la forza di attrazione tra due corpi.
Essa consiste in un manubrio, o giogo, composto da un asta sottile e leggera alle cui estremità sono state fissate due sfere di uguale massa e dimensione. Il giogo è appeso mediante un filo fissato al baricentro, tenendolo in equilibrio; il tutto è sostenuto da un treppiede. Al giogo è stato attaccato uno specchio. Davanti ad esso abbiamo posizionato un laser che incide nello specchio, riflettendo il punto luminoso su uno schermo posto davanti all' apparato.





Al pendolo è stata affiancata una sfera di piombo di massa $5{,}7kg$ che attrae la sfera appesa alla quale è accostata, facendo attenzione che i centri delle sfere fossero sullo stesso piano orizzontale. La sfera è stata poggiata su un carrello, per facilitare lo spostamento della sfera da una palla all'altra.
Per evitare che le palle si caricassero elettricamente, abbiamo inscatolato l'intero sistema sospeso in una gabbia di ottone, per isolarle, facendo attenzione a lasciare una finestrella per permettere al laser di uscire.
La sfera grande esercita sulla sfera appesa una forza, di tipo gravitazionale, che fa torcere il pendolo. Una volta che sappiamo il periodo di oscillazione e lo spostamento del punto dalla posizione di equilibrio possiamo ricavare la costante di Gravitazione Universale.
Il periodo può essere ricavato da un analisi del movimento del punto luminoso riflesso sullo schermo tramite una webcam, di cui conosciamo le dimensioni di un pixel grazie ad un metro inquadrato, e un programma per riconoscere il pixel più luminoso. Esso acquisisce un fotogramma ogni secondo, registra la posizione con il relativo secondo in un file composto da 86400 misurazioni (la durata di un giorno). Il pendolo è molto sensibile agli agenti esterni, per questo si raccomanda di tenere la bilancia in un luogo tranquillo e isolato.

Alcuni accorgimenti per massimizzare la precisione dell'esperimento:

- Il filo su cui sono appese le sfere più lungo possibile (per aumentare il periodo di oscillazione)
- Il filo su cui sono appese le sfere più sottile possibile (poiché il raggio incide notevolmente sulla costante elastica)
- La densità delle sfere appese e di quelle appoggiate a terra più grande possibile (per aumentare la forza di attrazione) [Bisogna prendere le masse delle sfere più grandi al limite del carico di rottura]
- Il raggio delle sfere più grande possibile (per aumentare la forza di attrazione e aumentare il periodo di oscillazione)
- La lunghezza tra specchio e parete più grande possibile (per avere una maggiore precisione nelle misure delle oscillazioni)
- Lunghezza del giogo più grande possibile (per aumentare il momento di inerzia)
- La distanza tra le sfere più piccola possibile (per aumentare la forza di attrazione)

Premessa teorica

Definiamo la lunghezza della leva ottica (distanza tra schermo e specchio) L, la lunghezza dell'asta $2l$, la massa delle sfere appese m e il loro raggio r, la massa della sfera grande M e il suo raggio R e il periodo di oscillazione T.

Il periodo di oscillazione del pendolo sarà

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

Essendo $2m$ la massa delle sfere sospese e k la costante elastica di un ipotetica molla ideale che sostituisce la forza che scaturisce dalla torsione del filo.

La forza di attrazione gravitazionale tra le due masse può essere espressa come

$$F = G\frac{Mm}{d^2}$$

Di conseguenza lo spostamento del giogo x è dato da

$$x = \frac{F}{k} = \frac{GMmT^2}{d^2 4\pi^2 2m} = \frac{GMT^2}{8d^2\pi^2}$$

La massa m sembra semplificarsi, invece contribuisce a determinare il valore di T, insieme ad alcune caratteristiche del filo.

Da questo possiamo determinare lo spostamento X della leva ottica
(L'angolo che si misura durante l'oscillazione è il doppio rispetto alla deviazione del giogo)

$$X = 2x\frac{L}{l} = 2\frac{GMT^2}{8\pi^2 d^2}\frac{L}{l}$$

Siccome possiamo conoscere l'ampiezza di X, possiamo ricavare la costate G

$$G = \frac{4\pi^2 d^2 X}{MT^2}\frac{L}{l}$$

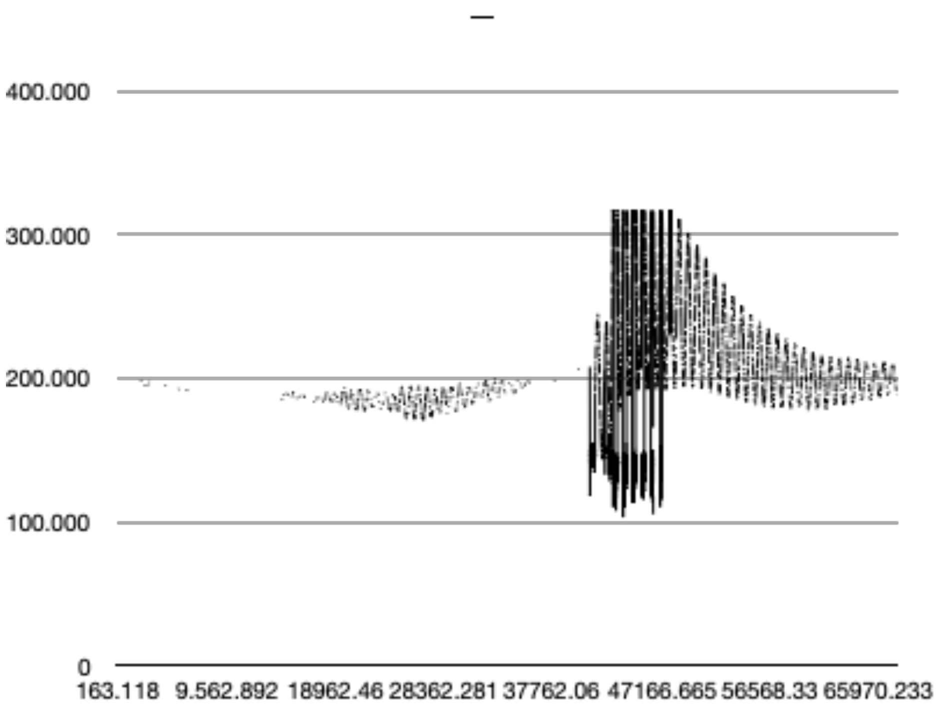
Raccolta dei dati

Per raccogliere i dati abbiamo utilizzato una webcam che trasmetteva un'immagine ogni secondo in tempo reale a un computer che, con un apposito programma, riconosceva il punto più luminoso con una sensibilità di mezzo pixel. La posizione di esso veniva poi registrata su un foglio di testo con il relativo secondo in cui veniva misurata.
Poi abbiamo misurato con una bilancia elettronica le masse delle sfere, con un metro la lunghezza della leva ottica e del giogo e con un calibro i diametri delle sfere.

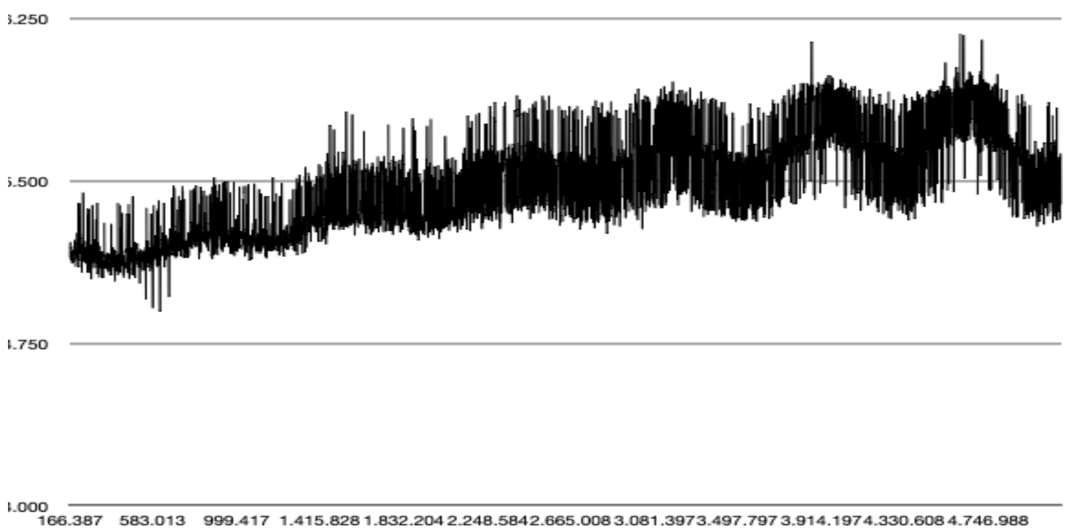
Raggio sfere piccole r	$1{,}85 cm$
Raggio della sfera grande R	$4{,}9 cm$
Massa delle sfere piccole m	$0{,}330 kg$
Massa della sfera grande M	$5{,}715 kg$
Lunghezza del giogo $2l$	$30{,}2 cm$
Lunghezza della leva ottica L	$74{,}9 cm$
Distanza tra i centri delle sfere d	$11{,}25 cm$

Analisi dei dati

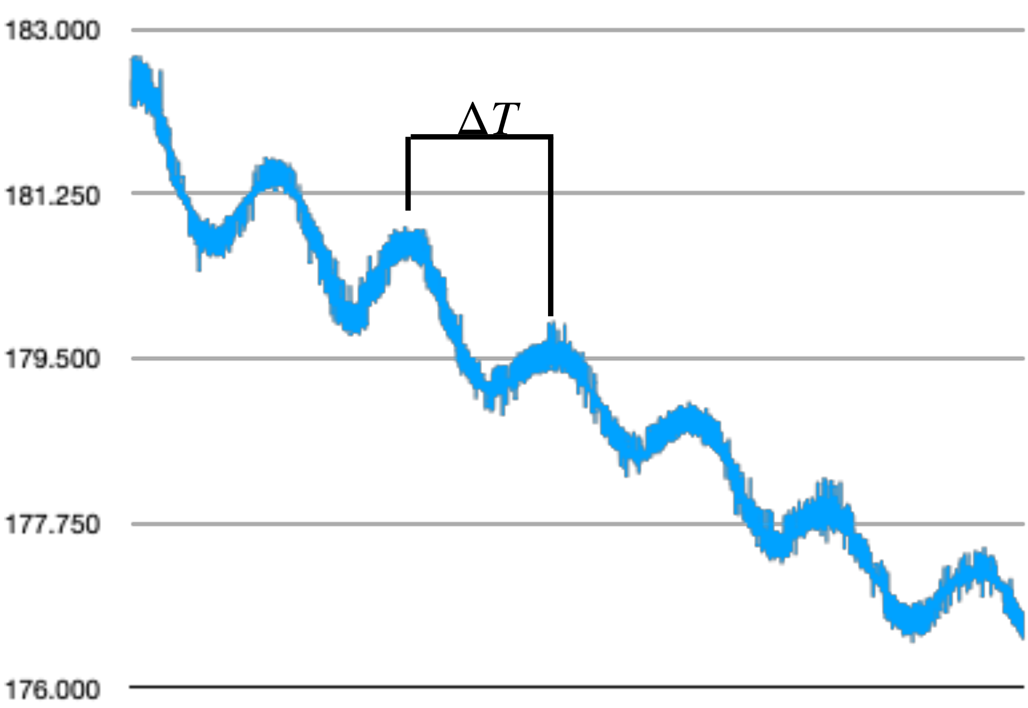
Dopo aver raccolto i dati abbiamo analizzato i file contenenti le posizioni del punto luminoso in funzione del tempo. Per farlo abbiamo riportato i dati in un foglio di calcolo (in questo caso Numbers, ma sarebbe andato bene anche Excel o Fogli Google) e abbiamo separato su due colonne i dati del tempo e della posizione. Poi abbiamo creato un grafico e abbiamo assegnato alle ascisse la colonna del tempo, e alle ordinate la posizione del pixel.



Dal grafico possiamo notare che i valori della posizione oscillano con un ampiezza maggiore dopo i 10’000 secondi, probabilmente perché l’armadio in cui era chiusa la bilancia veniva irradiato dai raggi del sole, creando correnti d’aria che impedivano una normale oscillazione. Abbiamo stabilito di prendere in considerazione solamente i primi 5000 valori dopo la mezzanotte, quando l’oscillazione non è disturbata da agenti esterni.



Con il mouse o il trackpad mettiamo il puntatore su una cresta e annotiamo il valore dell'ascissa, poi spostiamo il puntatore sulla cresta successiva e annotiamo anche di questa il valore dell'ascissa, poi le sottraiamo per avere il periodo T. In alternativa si può calcolare la differenza delle ascisse tra la prima oscillazione e quella ennesima, per poi dividerla per il numero di oscillazioni. In questo modo possiamo calcolare il periodo, con maggio precisione, riducendo gli errori.



Periodo $T = 728s$

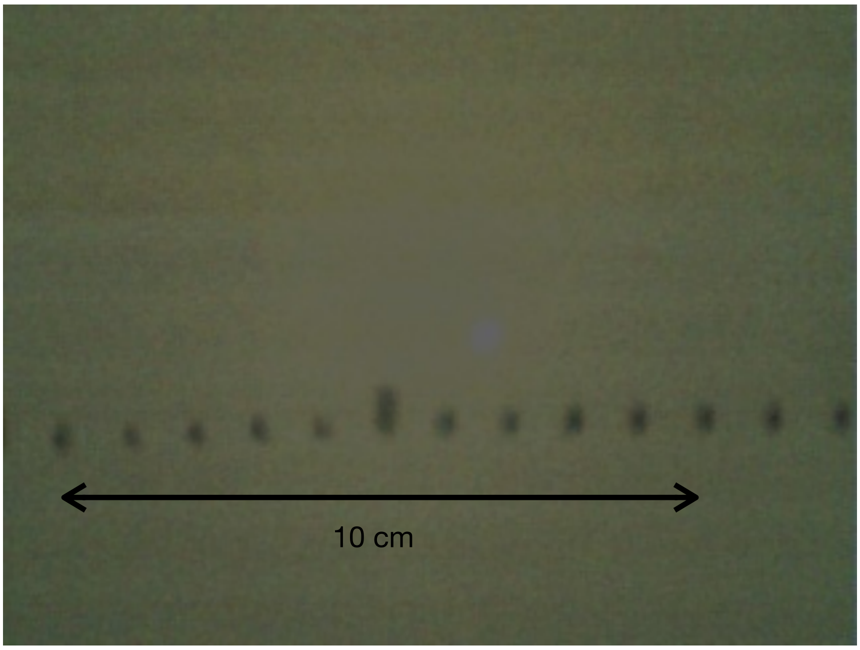
Per calcolare invece X, ovvero lo spostamento della leva ottica, dobbiamo calcolare il punto medio dell'oscillazione sia quando la sfera era vicina alla prima palla sia alla seconda. Per farlo bisogna prendere la colonna della posizione sul foglio elettronico dei giorni in cui la palla era la prima posizione e calcolarne la media, e poi fare la stessa cosa per quando la palla era vicina all'altra sfera.

19	**202.343**	201.25	201.875	203.109	203.073	205.112	205.174	206.867	206.523
20	**201.856**	201.206	201.983	203.255	203.077	205.141	205.131	206.564	206.514
21	**201.987**	201.187	201.911	203.267	203.109	205.079	205.057	206.575	206.451
22	**201.922**	201.27	202.109	203.123	203.035	205.072	205.072	206.502	206.581
23	**202.14**	201.299	202.135	203.006	203.088	205.38	205.035	206.614	206.564
24	**202.118**	201.29	202.359	203.088	203.069	205.052	205.06	206.582	206.472
25	**202.075**	201.303	201.902	203.054	203.104	205.189	205.114	206.598	206.523
26	**201.859**	201.266	202.354	203.115	203.046	205.14	205.219	206.542	206.546
27	**201.89**	201.307	202.36	203.068	203.053	205.117	205.045	206.631	206.674
28	**202.116**	201.283	202.195	203.055	203.058	205.216	205.057	206.842	206.341

SOMMA **8.255.124.279** MEDIA **203.900,7133...** MIN **200.219** MAX **208.825** CONTA.VALORI **44.983**

Punto medio accostamento prima palla	184,78 pixel
Punto medio accostamento seconda palla	203,90 pixel
Differenza punti medi (Δd_{px})	19,12 pixel

Per calibrare la fotocamera e conoscere le dimensioni di un pixel abbiamo salvato un frame della registrazione, dove era inquadrato anche un metro.



Il metro riporta 13,1 cm, e le dimensioni dell'immagine sono di 320x240 pixel. Quindi possiamo risalire alle dimensioni di un pixel.

$$l_{px} = \frac{l}{n_{px}} = \frac{0{,}131}{320} = 4{,}09 \cdot 10^{-4} m$$

Ora possiamo calcolare lo spostamento del punto medio in metri.

$$X = l_{px} \cdot \Delta d_{px} = 4{,}09 \cdot 10^{-4} \cdot 19{,}12 = 7{,}82 \cdot 10^{-3} m$$

Adesso possediamo tutti i parametri che ci permettono di calcolare la costante di gravitazione universale G, basta sostituirli nell'equazione, trasformando tutte le misure in metri, chilogrammi e secondi.

$$G = \frac{4\pi^2 d^2 X}{MT^2} \frac{L}{l} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot 0{,}1135^2 \cdot 7{,}82 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}749}{5{,}715 \cdot 728^2 \cdot 15{,}1} = 6{,}51 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Il valore della costante di Gravitazione Universale da noi ricavata differisce di poco dal valore teorico di $6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2}$. Questo potrebbe accadere poiché la distanza tra i centri delle sfere equivale a $d = r + \delta + R$, dove δ (distanza dalle superfici delle sfere appese) costituisce la maggiore fonte di errore.