

Modello matematico della reazione a catena

Consideriamo una certa quantità di nuclei di U^{235} e indichiamo con $N(t)$ il numero di quelli che hanno subito fissione all'istante t . Supponiamo che dopo un intervallo di tempo Δt avvengano ΔN nuove fissioni a causa dei neutroni emessi dalle precedenti fissioni.

Chiamiamo k il numero medio di neutroni da una fissione che causano una nuova fissione (i rimanenti neutroni vengono assorbiti in reazioni di cattura senza fissione oppure riescono a sfuggire senza essere assorbiti)

Tale fattore è fondamentale per capire se la reazione è destinata a spegnersi ($k < 1$) oppure è stabile, come in un reattore nucleare (siamo in condizioni di *massa critica*, con $k = 1$) o infine si ha una reazione a catena esplosiva in cui il numero di fissioni aumentano esponenzialmente ($k > 1$)

Ad esempio se ogni nucleo emette tre neutroni e di questi mediamente $k = 1,2$ stimolano un nuovo decadimento, all'istante $t + \Delta t$ si fissioneranno $kN = 1,2N$ nuovi nuclei

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = kN;$$

così la rapidità con cui varia il numero di nuclei che hanno subito fissione è proporzionale al numero stesso. Infatti nel successivo intervallo di tempo, la stessa frazione k andrà riferita non al numero iniziale ma a quello già incrementato dalle prime ΔN fissioni.

Raffiniamo il modello passando dagli incrementi finiti alle derivate:

$$\frac{dN(t)}{dt} = kN(t), \text{ o anche } \frac{dN(t)}{N(t)} = k dt$$

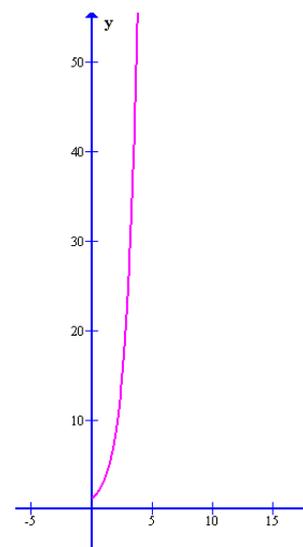
Questa è una equazione differenziale, in quanto mette in relazione una funzione con le sue derivate. La risolviamo integrando entrambi i membri:

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = k \int dt \Rightarrow \ln N(t) = kt + C \Rightarrow N(t) = e^{kt+C} = C' e^{kt}$$

ponendo $t=0$ si ottiene $C' = N(0) = N_0$, numero di fissioni all'istante iniziale, da cui

$$N(t) = N_0 e^{kt}.$$

Che rappresenta una crescita esponenziale nel tempo del numero dei nuclei che hanno subito fissione: appunto, una reazione esplosiva!



Nel caso di una malattia infettiva, il primo parametro chiave che regola la trasmissione è il **numero di riproduzione di base (R_0)**: *numero medio di casi generate da un un caso indice in una popolazione completamente suscettibile (nessun immunizzato, quindi siamo all'inizio) alla malattia in un certo intervallo di tempo.*

Quindi questo parametro è perfettamente analogo al k della reazione nucleare, e valgono le stesse considerazioni: se $R_0 < 1$, l'infezione sul lungo termine si estinguerà, mentre se $R_0 > 1$ l'infezione potrà diffondersi nella popolazione. Generalmente, più è alto il valore di R_0 , più difficile è controllare l'epidemia. Per il Covid-19 $R_0=3.3-5.7$. Per l'Ebola è 1,5-2,5, per il morbillo è 12-18